Frei verfügbare Materialien für Unterricht und Fortbildung: Stochastik verständnisorientiert unterrichten

Birgit Griese, Ralf Nieszporek, Rolf Biehler, Paderborn

Zusammenfassung: *Die Forderung nach Lehrerfortbildungen, die eine Brücke zwischen der Schulpraxis und dem fachlichen Anspruch schlagen, ist zentral für eine Weiterentwicklung des Stochastikunterrichts. Das Deutsche Zentrum für Lehrerbildung Mathematik (DZLM) stellt über seine Homepage Fortbildungsmaterialien bereit, die vielfältige Anregungen für den Unterricht bieten und deren Elemente dort ohne weitere Modifikation eingesetzt werden können. Als Zielgruppe sind Multiplikator*innen, d. h. Personen, die Fortbildungen leiten, intendiert, aber auch Fachgruppen, die sich mit der Thematik auseinandersetzen wollen; und auch Lehrkräfte können von den Ideen für ihren Unterricht profitieren. Das im folgenden vorgestellte Fortbildungsmodul behandelt einen praxisnahen (Wieder-)Einstieg in die Stochastik in der gymnasialen Oberstufe mit Unterstützung durch Simulationen. Das dazugehörige Materialpaket kann kostenlos unter www.dzlm.de/Stochastik_Sek heruntergeladen werden. Es umfasst kurze Übersichten und Beschreibungen der Inhalte, Präsentationsfolien, Arbeitsblätter mit Lösungen, Lernumgebungen für GTR und GeoGebra sowie Erklärvideos für den Umgang mit verschiedener Software und weitere Quellen, die den fachlichen Hintergrund im Detail darstellen.*

1 Grundideen des DZLM

Das Deutsche Zentrum für Lehrerbildung Mathematik (DZLM) hat es sich zum Ziel gesetzt, „wirksam fachbezogen fort[zu]bilden“ und versteht dies als „eine gemeinsame Herausforderung für Wissenschaft und Praxis“ (dzlm.de). Daher haben sich im DZLM Mathematikdidaktiker*innen von neun Universitäten aus verschiedenen Bundesländern zusammengeschlossen, um gemeinsam mit Praktiker*innen Unterstützungsangebote im Fach Mathematik für Lehrkräfte, Erzieher*innen und Multiplikator*innen zu entwickeln und zu erforschen.

Dabei wird eine Strategie aus drei Säulen verfolgt. Auf Systemebene kooperiert das DZLM mit Landesinstituten, Ministerien und Bezirksregierungen. Die personale Strategie widmet sich der Qualifizierung von Multiplikator*innen, die die erprobten DZLM-Konzepte in ihrem Einflussbereich nutzen und weiterentwickeln. Die hier im Fokus stehende materiale Strategie umfasst die Entwicklung reichhaltigen Fortbildungs- und Unterrichtsmaterials, das über die Homepage des DZLM kostenfrei zur Verfügung steht. Weitere Angebote sind unter www.dzlm.de/angebote-einstieg zu finden. Das Material, das hier genauer vorgestellt wird, findet sich unter dem Kurzlink www.dzlm.de/Stochastik_Sek. Das erste Modul der Reihe deckt den (Wieder)Einstieg in die Stochastik in der gymnasialen Oberstufe mit Simulationen ab. Weitere Module stehen unmittelbar vor der Fertigstellung, unter anderem ein Modul zum Einstieg in das Hypothesentesten mit Hilfe von P-Werten und ein Modul zum Umgang mit digitalen Werkzeugen im Stochastikunterricht.

2 Gestaltungsprinzipien für Fortbildungen

Dem Postulat des forschungsbasierten Fortbildungsdesigns folgend, werden die Lehrkräftefortbildungen des DZLM auf der Grundlage von sechs Gestaltungsprinzipien konzipiert, deren Relevanz wissenschaftlich belegt ist (Barzel & Selter 2015).

Kompetenzorientierung beschreibt hierbei die konsequente Ausrichtung der Fortbildung und des anvisierten Unterrichts an den (inhalts- und prozessbezogenen) Kompetenzen der Lernenden. Dies folgt den Anforderungen der Bildungsstandards.

Lehr-Lern-Vielfalt meint ein breites Angebot von Zugängen, die unterschiedliche Wahrnehmungskanäle ansprechen, sodass der Heterogenität der Lerngruppe Rechnung getragen werden kann. Dies gilt sowohl für die Gruppe der Teilnehmer*innen an der Fortbildungsmaßnahme als auch für die Schüler*innen, die im Anschluss den dort thematisierten Unterricht erleben.

Teilnehmendenorientierung fokussiert die Orientierung an den Bedarfen der Fortbildungsteilnehmer*innen. Damit sind jedoch nicht ihre situativen Bedürfnisse gemeint, sondern im Sinne von Unterrichtsentwicklung die für eine Steigerung der Unterrichtsqualität empfehlenswerten Impulse für Innovation und Veränderung.

Kooperationsanregung stützt sich auf die Erkenntnis, dass Lehrkräfte nicht isoliert, sondern im Klassen-, Jahrgangs- oder Fachteam agieren (sollten). Nachhaltige Unterrichtsentwicklung benötigt kooperative Strukturen, damit die Veränderungen nicht an einzelne Personen gebunden sind, sondern sich systemisch manifestieren können.

Mit dem Gestaltungsprinzip *Fallbezug* entsprechen Lehrkräftefortbildungen dem Bedürfnis der Teilnehmer*innen, dass ihnen Unterstützung angeboten wird, die sie in ihrem Unterrichtsalltag auch praktisch anwenden können. Das Sandwich-Prinzip einer typischen DZLM-Fortbildung (Fortbildungen mit einem Minimum von zwei Präsenzterminen mit einer Distanzphase dazwischen) ermöglicht es den Teilnehmer*innen, in der Zeit zwischen zwei Fortbildungsterminen eigene Erfahrungen mit den Inhalten und Materialien zu sammeln, über die sie sich in den folgenden Sitzungen austauschen können.

Reflexionsförderung ist ein wichtiger Aspekt, wenn die konkreten Fortbildungsinhalte und darüber hinaus generelle Aspekte des Unterrichts oder einer Lehrinnovation adressiert werden sollen. Nur wenn die Teilnehmer*innen gemeinsam und unter Anleitung durch Multiplikator*innen die neu präsentierten, unterrichtlichen Konzepte oder ihre eigenen Erfahrungen reflektieren, ist eine nachhaltige und systemische Implementation zu erwarten.

3 Professionalisierungsforschung

Im DZLM werden die Überlegungen zum Design und die Untersuchungen zur Wirksamkeit der Fortbildungen im Forschungsrahmen des Drei-Tetraeder-Modells (3TM) zur gegenstandsspezifischen Fortbildungsforschung verortet (Prediger, Leuders & Rösken-Winter, 2017), siehe Abbildung 1. Dieses gliedert sich zunächst grob in die drei Ebenen Unterricht, Fortbildung und Qualifizierung (von Fortbildner*innen). Auf jeder der drei Ebenen wird ein Tetraeder betrachtet, dessen vier Eckpunkte (1) die Materialien und Medien, (2) den Gegenstand, sowie (3) die Lernenden und (4) die Lehrenden repräsentieren. Die Kanten und Seitenflächen beschreiben entsprechend die Beziehungen zwischen diesen Elementen.

So kann die Zielrichtung der Forschung visualisiert werden (siehe Abbildung 2), z. B. liefert Lernprozessforschung mit ihrem Blick von der Unterrichtsebene auf die Fortbildungsebene „Erkenntnisse zu möglichen oder wünschenswerten Lernverläufen und erlaubt die Entwicklung von Theorien und Modellen in Design Research-Ansätzen“, „[w]ährend Wirkungsforschung fragt, wie Professionalisierungsmaßnahmen jeweils auf den Ebenen darunter Wirkungen zeigen“ (Prediger, Leuders & Rösken-Winter 2017, S. 9). Auf diese Weise lassen sich Erkenntnisse verschiedener Art über Zusammenhänge zwischen Gegenständen, Materialien, Lernenden und Lehrenden generieren, die als Theorieelemente Kategorien-erzeugende, beschreibende, normative, erklärende oder präskriptive Funktion haben können (Prediger, 2019). Für aktuelle Forschungen des DZLM empfehlen wir die Seite www.dzlm.de/forschung-und-entwicklung/publikationen.

4 Aufbau der Fortbildungsmaterialen

Anhand der Gestaltungsprinzipien und basierend auf Erkenntnissen der Professionalisierungsforschung entwickelt das DZLM verschiedene Fortbildungsmodule. Aktuell stehen 17 Module, die jeweils aus mehreren Bausteinen bestehen, auf der DZLM-Homepage bereit. Nach einer Registrierung können diese kostenlos heruntergeladen werden.

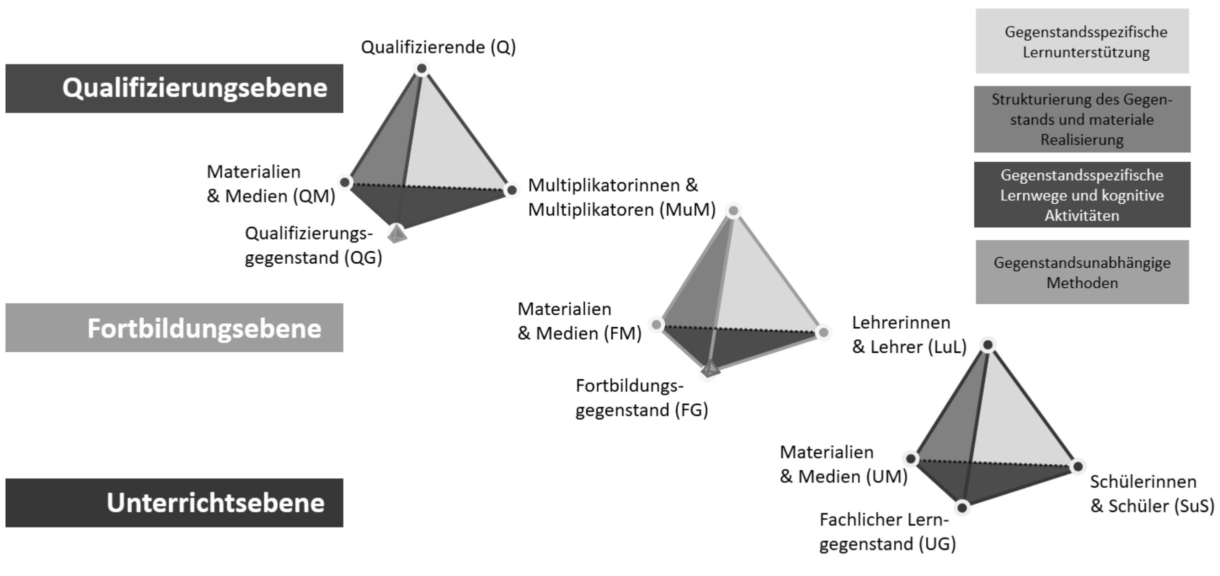

Abb. 1: Drei-Tetraeder-Modell der gegenstands-spezifischen Fortbildungsforschung (Prediger, Leuders & Rösken-Winter, 2017, verändertes Layout)

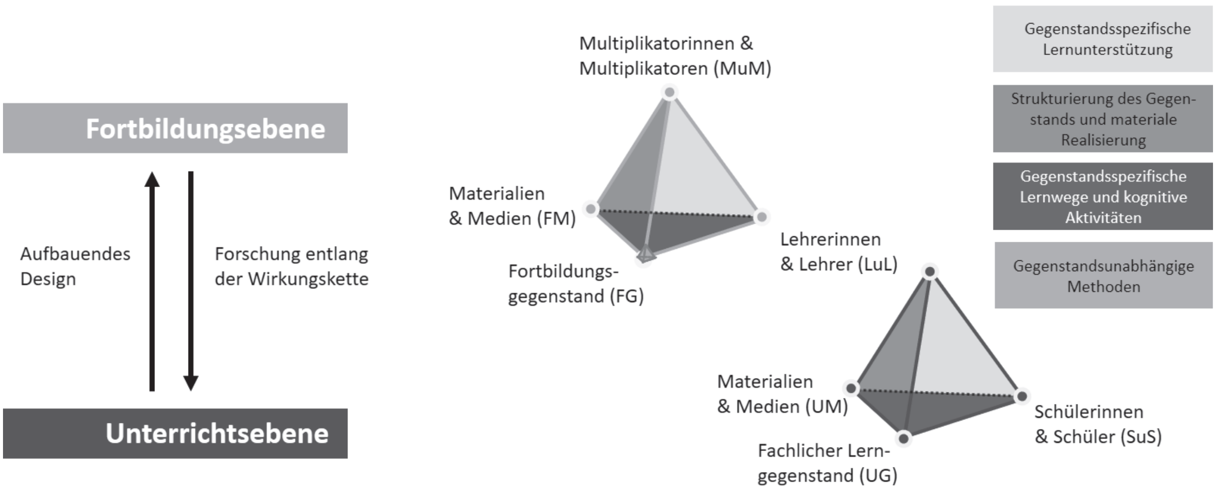

Abb. 2: Forschung entlang der Wirkungskette auf zwei (von drei) Ebenen (Prediger, Leuders & Rösken-Winter, 2017, verändertes Layout)

Jedes dieser Module enthält ein Modulhandbuch, das kurz und knapp die Inhalte und die Struktur der einzelnen Bausteine des Moduls beschreibt, die jeweils etwa drei Stunden Zeit erfordern. Dadurch ist eine schnelle Orientierung möglich, welche Elemente für das aktuelle Anliegen genutzt werden können. Die Darstellungen der Bausteine enthalten zudem Voraussetzungen und Lernziele und bieten eine Übersicht über den vorgeschlagenen Ablauf, inklusive der eingesetzten Medien und Materialien.

Die Materialien bestehen aus verschiedenen Bestandteilen, in deren Kern die Präsentationsfolien stehen. Um die Multiplikator*innen zu unterstützen, enthalten sie Zwischenfolien zur Struktur-Transparenz (leicht erkennbar durch ihre Farbgebung), auf denen Hinweise zur Umsetzung und Moderation zu finden sind, z. B. methodische Vorschläge (Abbildung 3) oder Hinweise, wenn später wieder an einen Inhalt angeknüpft werden soll. Zudem sind zahlreiche

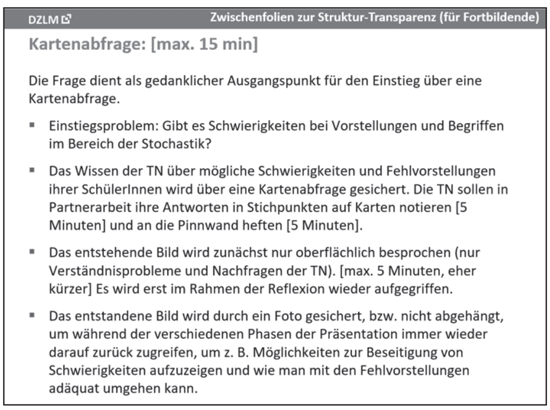

Abb. 3: Beispiel für eine Zwischenfolie mit Methodenhinweisen aus dem Fortbildungsmaterial

Aufgabenblätter vorhanden, die unmittelbar in einer Fortbildung oder im Unterricht eingesetzt werden können. Zur Entlastung der Fortbildner*innen und Lehrkräfte sind meist auch ausführliche Lösungsblätter vorhanden. Dabei wurde darauf Wert gelegt, dass fast alle Materialien unter einer CC-Lizenz (Creative Common-Lizenz, CC BY-SA) zur Verfügung gestellt werden. Diese erlaubt, dass das Material weiterverwendet und auch nach den eigenen Wünschen adaptiert werden darf, solange die Quelle angegeben wird und die Lizenz unverändert bleibt.

Zur einfacheren Handhabung und Adaption der Folien und Arbeitsblätter liegen diese in editierbarer Form (z. B. Microsoft Word) vor. Je nach Fortbildungsmodul können auch weitere Materialien wie (Lern-)Videos, vertiefendes Material oder Schülerdokumente vorhanden sein, die ggf. unter einer anderen Lizenz stehen.

Aktuell stehen für den Stochastikunterricht in der Sekundarstufe II drei Bausteine (zusammengefasst in einem Modul) zur Verfügung, die den Einstieg in die Stochastik in der gymnasialen Oberstufe mit Simulationen thematisieren. Neben einer Präsentation mit interessantem Inhalt und spannenden Arbeitsblättern (siehe nächstes Kapitel) stehen Lernumgebungen für GeoGebra und den graphischen Taschenrechner zur Verfügung. Durch detaillierte Anleitungen und Erklärvideos findet ein niedrigschwelliger Einstieg in den CASIO CG20 und TI-Nspire CX statt. Darüber hinaus stehen für die Distanzphasen des Sandwich-Prinzips auch vertiefende Selbstlernmaterialien zum Empirischen Gesetz der großen Zahlen zur Verfügung.

5 Einstieg in die Stochastik in der Oberstufe – mit Simulationen

5.1 Das Spiel „Differenz trifft“

Der erste Fortbildungsbaustein des Moduls *Einstieg in die Stochastik in der Oberstufe – mit Simulationen* dreht sich rund um das Spiel „Differenz trifft“ (Biehler & Prömmel 2011). In diesem Spiel werden zwei faire sechsseitige Würfel und deren (positive) Differenz betrachtet. Auf einem Spielfeld mit den Feldern 0 bis 5 (entsprechend der sechs möglichen Differenzen) verteilen die Spieler*innen jeweils 18 Spielsteine. Wenn eine Differenz geworfen wird, wird ein Spielstein entfernt. Gewonnen hat, wer als erstes seinen/ihren letzten Spielstein entfernt hat. Gesucht ist die optimale Lösungsstrategie, also die aussichtsreichste Verteilung der Steine auf dem Spielfeld (Abbildung 4 zeigt zwei Beispiele). Anders als bei der Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten der Augensummen beim Wurf zweier Würfel ist die Lösung von „Differenz trifft“ keine symmetrische Verteilung. Die von Fortbildungsteilnehmer*innen und Schüler*innen im gleichen Maße genannten Strategien sind häufig die Gleichverteilung der Spielsteine auf dem Spielplan (in Abbildung 4 durch die dunklen Spielsteine dargestellt) oder auch die Häufung der Spielsteine auf dem Feld der als am wahrscheinlichsten angenommenen Differenz. Nach einigen Spielrunden zeigt sich aber oft, dass diese beiden Lösungsansätze nicht optimal sind. Auch wirft die Bearbeitung dieses Problems die Frage auf, ob man beim Wurf die Würfel voneinander unterscheiden muss oder nicht.

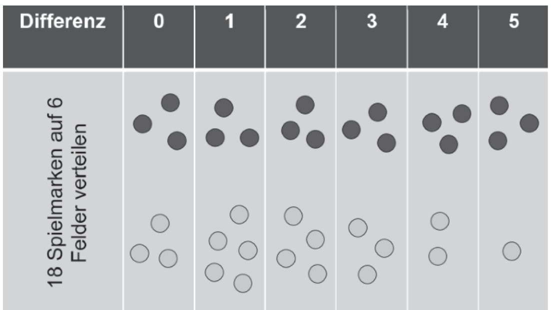

Abb. 4: Spielplan „Differenz trifft“ mit zwei möglichen Platzierungen der 18 Spielsteine

Die Bearbeitung beider Fragen kann sowohl auf einer experimentellen (z. B. mittels stochastischer Simulation) als auch auf einer eher theoretischen (z. B. mit Hilfe der Kombinatorik) Ebene geschehen. Beide Varianten sind im Material detailliert erklärt und mit Arbeitsblättern, Simulationsanleitungen und Lernvideos unterfüttert. Dies ermöglicht es, auch bei heterogenen Lerngruppen einen geeigneten (Wieder-) Einstieg in die Stochastik der Oberstufe zu finden. Bei diesem Ansatz werden die Vorkenntnisse der Schüler*innen sowohl berücksichtigt als auch gefestigt und ausgebaut. Zusätzlich wird durch die Verzahnung von Kombinatorik und stochastischen Simulationen ein tieferes Verständnis gefördert und der Nutzen von Simulationen aufgezeigt.

5.2 Das „10/20-Testproblem“

Der zweite Baustein des Moduls beschäftigt sich mit dem 10/20-Testproblem, siehe Abbildung 5. Hierbei handelt es sich um eine äußerst spannende Aufgabe, die ihren Ursprung im bekannten *Maternity Ward*-Problem (vgl. Kahnemann & Tversky 1972, Tversky & Kahneman 1974) hat.

Test 1 besteht aus 10 Fragen, bei denen der Prüfling entweder ja oder nein ankreuzen kann. Test 2 besteht aus 20 Fragen, bei denen der Prüfling entweder ja oder nein ankreuzen kann. Beide Tests sind jeweils bestanden, wenn mindestens 60% der Fragen richtig beantwortet wurden.

Abb. 5: Einstiegsaufgabe „10/20-Testproblem“

Im Zentrum des Problems steht die Frage nach der Wahrscheinlichkeit zum Bestehen zweier Tests. Der erste Test besteht aus 10 Fragen mit zwei Antwortmöglichkeiten, von denen nur eine richtig ist, der zweite Test aus 20 solcher Fragen. Beide Tests werden erfolgreich abgeschlossen, wenn mindestens 60 % der Fragen richtig beantwortet wurden (vgl. Biehler, Hofmann, Maxara & Prömmel 2011). Die naheliegende Frage bei dieser Testkonstellation ist, welcher der Tests mit einer höheren Wahrscheinlichkeit bestanden wird, wenn man die Antwort auf jede Frage raten muss – oder sind sogar beide Tests gleichwahrscheinlich? Führt man einen (vorgeblich echten jedoch kaum bewältigbaren) Leistungstest im Mathematikkurs durch, bei dem manche Schüler*innen 10 und andere 20 Fragen nur durch Raten bewältigen können, so hat man gewiss die volle Aufmerksamkeit der Schüler*innen im Unterricht. Aufgrund der typischen Fehlvorstellung vom „Gesetz der kleinen Zahlen“, die Stichprobengröße spiele keine Rolle (Tversky & Kahneman 1971; Sedlmeier & Gigerenzer 1992) stellt die Lösung des Problems dabei nicht nur Schüler*innen, sondern auch erfahrene Lehrkräfte vor Rätsel. Diese inkorrekte Denkweise wird im Verlauf des Bausteines durch eine tragfähige Vorstellung (Gesetz der großen Zahlen) ersetzt, deren Quantifizierung auch alltagstaugliche Faustregeln liefert ($1/\sqrt{n}$-Gesetz, siehe 5.3.). Für die Lehrkräfte ist es wichtig, die Verbindung der Faustregeln zu den σ-Regeln bei der Binomialverteilung zu verstehen, die im Unterricht aber erst später thematisiert werden können. Darüber hinaus wird durch den Einsatz von Visualisierungen der Blick auf die Verteilung als Ganzes und damit weg von Einzelwahrscheinlichkeiten und Kenngrößen der Verteilung gelenkt. Auch wird in diesem Baustein der sinnvolle Einsatz von Simulationen thematisiert. Durch diese lassen sich die Wahrscheinlichkeiten approximieren, insbesondere, wenn der Kenntnisstand der Schüler*innen eine Berechnung (noch) nicht erlaubt. Simulationen werden dabei als Strategie zum Problemlösen und Methode *sui generis* eingeführt, siehe Biehler & Maxara (2007).

Durch die zahlreichen Bezugspunkte des 10/20-Testproblems kann zu späteren Zeitpunkten im Unterricht erneut darauf verwiesen und daran angeknüpft werden. Im Kontext der Binomialverteilung kann das Beantworten der Testfragen durch Raten mit Hilfe eines Bernoulli-Prozesses modelliert werden. Beim Hypothesentesten spielen Überschreitungswahrscheinlichkeiten bei der Berechnung von P-Werten eine wichtige Rolle.

5.3 Genauigkeit von Simulationen – Prognoseintervalle und intuitive Konfidenzintervalle

Aufbauend auf dem 10/20-Testproblem bzw. basierend auf dem Wurf einer fairen Münze widmet sich der dritte Fortbildungsbaustein dem empirischen Gesetz der großen Zahlen. Aufgrund der höheren fachlichen Komplexität dieses Themas sind die Ausführungen in diesem Abschnitt detaillierter.

In diesem Baustein wird zu Beginn thematisiert, wie die relativen Häufigkeiten in einem Experiment um eine bekannte Wahrscheinlichkeit p schwanken. Dann wird die Umkehrung thematisiert: Wenn man die relative Häufigkeit bei n Versuchen als Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit nimmt, mit welchen Abweichungen muss man rechnen? Dieses Thema muss früh im Unterricht thematisiert werden, wenn man mit Simulationen nicht nur illustrativ arbeitet. Im Kern geht es dabei um Prognoseintervalle und um Konfidenzintervalle (hier Schätzbereiche genannt), die in einer ersten anschaulichen Form thematisiert werden. Dabei bauen wir auf dem Stufenkonzept zum $1/\sqrt{n}$-Gesetz von Biehler und Prömmel (2013) auf.

Nachdem die Schüler*innen im Unterrichtsverlauf erste Erkundungen und Beobachtungen an Trajektorien der relativen Häufigkeiten gemacht haben, ist es nun wichtig, mehrere mögliche (simulierte) Trajektorien gleichzeitig zu betrachten (siehe Abbildung 6, bei $p = ½$).

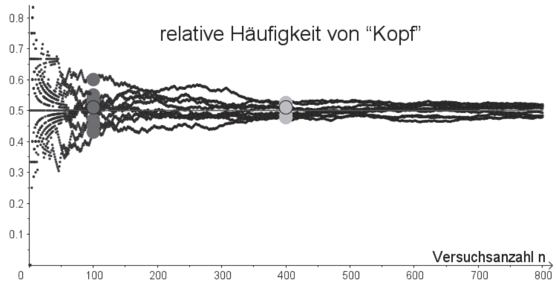

Abb. 6: Auszug aus der Lernumgebung in GeoGebra zur Erkundung des $1/\sqrt{n}$-Gesetzes: relative Häufigkeiten in Abhängigkeit von der Versuchsanzahl, Beobachtungspunkte bei $n = 100$ und $n = 400$.

Im Unterricht wird häufig nur auf das allmähliche und tendenzielle Annähern an ½ eingegangen. Der Fokus der Schüler*innen soll nun aber auf die Beobachtung der Schwankungen an zwei Stellen, hier $n = 100$ und $n = 400$ gelenkt werden. Mit der von uns entwickelten Lernumgebung in GeoGebra (die auf eine Idee von Reimund Vehling zurückgeht) kann der Blick auf die unterschiedlichen Schwankungen für $n = 100$ und $n = 400$ gelenkt werden. Mit den GeoGebra-Dateien können die relativen Häufigkeiten an diesen zwei Stellen erst im Spurmodus markiert, dann „gesammelt“ und simultan als Verteilungen visualisiert werden (siehe Abbildung 7). Diese zunächst technische Idee soll die Trajektoriendarstellung mit den Verteilungsdarstellungen kognitiv verknüpfbar machen. Die Lernumgebung liefert die mittleren 95 % (empirisch mit dem Quantilbefehl, nicht theoretisch über die σ-Regeln), die als 95 %-Prognoseintervall für die relativen Häufigkeiten interpretiert werden können.

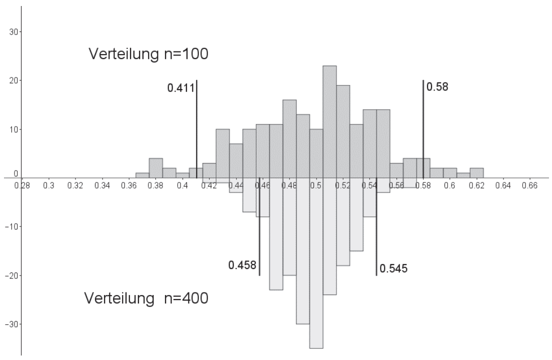

Abb. 7: Auszug aus der Lernumgebung in GeoGebra zur Erkundung des $1/\sqrt{n}$-Gesetzes: Visualisierungen der mittleren 95 % nach wiederholter Simulation des 100- bzw. 400-fachen Münzwurfs.

Gegenüber den bei Biehler und Prömmel (2013) vorgeschlagenen Simulationen und Visualisierungen bietet die GeoGebra-Datei dieses Bausteins eine Verknüpfung von zwei Perspektiven: (1) Trajektorien mit wachsendem n, (2) Verteilungen mit festen Stichprobenumfängen.

Die qualitative Einsicht, dass das Prognoseintervall bei größerem n kleiner bzw. genauer wird, kann nun systematisch zu der quantitativen Frage erweitert werden, wie die Intervallbreite von n abhängt. Dies kann in einer Simulation in einer weiteren GeoGebra-Datei untersucht werden. Hierbei ergibt sich eine Abhängigkeit von $1/\sqrt{n}$.

Dieses Ergebnis kann in der Formel $|p - h_n| \leq 1/\sqrt{n}$ zusammengefasst werden. Bei bekanntem p kann eine Aussage über die unbekannte relative Häufigkeit h_n abgeleitet werden. Diese besagt, dass bei n-facher (stochastisch unabhängiger) Wiederholung eines Zufallsexperiments 95 % der beobachteten relativen Häufigkeiten in dem Intervall $[p - 1/\sqrt{n};\ p + 1/\sqrt{n}]$ um die Wahrscheinlichkeit p liegen (also in dem sogenannten 95 %-Prognoseintervall). Simulation bietet hier die Möglichkeit, mit Schüler*innen diese Formel frühzeitig zu erarbeiten, wobei bewusstgemacht werden sollte, dass es sich nicht um einen mathematischen Beweis handelt, die Mathematik diesen aber liefern könnte. Im Fortbildungsmaterial wird für die Lehrkräfte dazu als Hintergrundwissen die Beziehung zu den σ-Regeln hergestellt, aus denen das $1/\sqrt{n}$-Gesetz als Approximation hergeleitet werden kann.

Im Unterricht ist zu diesem Zeitpunkt die Umkehrung (Schätzen von p aus einer beobachteten relativen Häufigkeit) noch nicht thematisiert. Sie ist jedoch für die praktische Nutzung der Simulation zentral, um die Frage zu beantworten, wie oft man simulieren soll und welche Genauigkeit man damit erreicht. Ausgehend von der allgemeinen Formel $|p - h_n| \leq 1/\sqrt{n}$ für Prognoseintervalle können Aussagen über ein unbekanntes p hergeleitet werden. Diese Formel wird umgedeutet in eine Aussage über p bei beobachtetem h_n. Es ist naheliegend, dass plausible Werte für p nicht weiter als $1/\sqrt{n}$ von dem beobachteten h_n entfernt liegen werden. Als Schätzbereich für p wird daher $[h_n - 1/\sqrt{n};\ h_n + 1/\sqrt{n}]$ angegeben. Wir schlagen als Formulierung vor: Folgender Schluss kann mit einer Sicherheit von 95 % gezogen werden: „Das unbekannte aber feste p liegt im Intervall $[h_n - 1/\sqrt{n};\ h_n + 1/\sqrt{n}]$". Hierbei bedeutet „Schluss ziehen mit 95 % Sicherheit", dass bei häufiger Wiederholung des Experiments zur Bestimmung der Schätzbereiche in etwa 95 % der Fälle eine richtige Aussage gemacht werden kann – und dementsprechend auch in 5 % der Fälle eine falsche.

Es ist eine didaktisch vertretbare Elementarisierung, das bekannte Problem der Interpretation der Sicherheitswahrscheinlichkeit bei Konfidenzintervallen, das komplexer ist als bei Prognoseintervallen, hier nur in erster Näherung zu thematisieren. Für die Lehrkräfte wird aber im Fortbildungsmaterial fachliches Hintergrundwissen angeboten, das die Beziehung zu einer fachlich vollständigen Behandlung von Konfidenzintervallen herstellt und die vorgeschlagene didaktische Elementarisierung begründet. In diesem Baustein findet sich dazu Selbstlernmaterial mit einer fachlichen Fundierung der Prognose- und Konfidenzintervalle, das über die eigentlichen Fortbildungsfolien hinausgeht. Unterstützt werden die Multiplikator*innen bzw. Lehrkräfte durch vielfältige vorgefertigte Simulationen, Anleitungen und auch Erklärvideos. Dem Problem der Verwechslung und Fehlinterpretation von Prognose- und Konfidenzintervallen wird durch verschiedene Gegenüberstellungen (vgl. Abbildung 8) und zugängliche Beispiele entgegengewirkt, sodass eine klare Abgrenzung der Bedeutungen sowie deren Interpretationen deutlich wird.

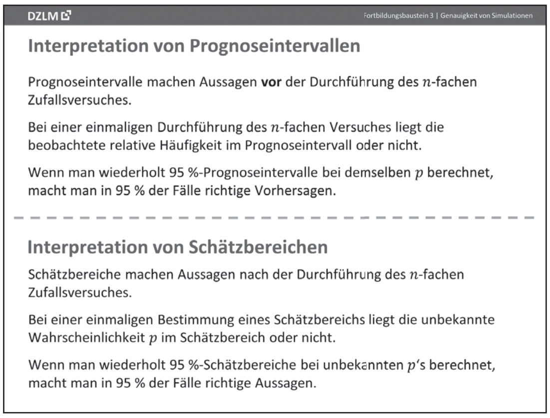

Abb. 8: Auszug aus den Fortbildungsfolien zur Gegenüberstellung von Prognose- und Konfidenzintervall (hier Schätzbereich genannt).

5.4 Einsatzmöglichkeiten und Evaluation

Die zuvor vorgestellten Bausteine können unabhängig voneinander einzeln eingesetzt werden. Die Autor*innen der Bausteine, zu denen die Autor*innen dieses Artikels gehören, empfehlen jedoch, mehrere Bausteine zu einem Fortbildungsmodul zusammenzufügen. Verschiedene Möglichkeiten der Reihenfolge der Bausteine werden sowohl auf den Folien als auch im Modulhandbuch vorgeschlagen (vgl. Abbildung 9). Je nachdem, ob der Schwerpunkt auf die Einführung von und die Beschäftigung mit dem graphischen Taschenrechner gelegt werden soll, kann anstelle des ersten bzw. zweiten Bausteines auch ein eher technisch orientierter Workshop vorangestellt werden. Dieser besteht aus zahlreichen Anleitungen und integrierten Aufgaben, unterstützt durch Lernvideos.

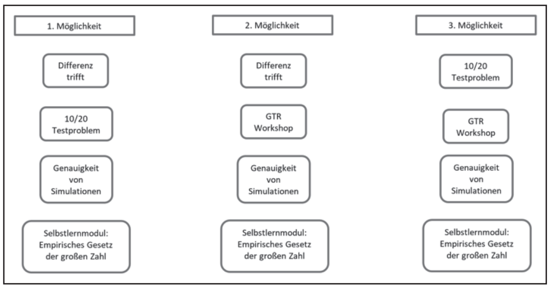

Abb. 9: Die Fortbildungsbausteine sind unterschiedlich kombinierbar (Ausschnitt aus dem Modulhandbuch).

Basierend auf den verschiedenen Bausteinen des Moduls haben die Autor*innen die Fortbildung bereits mehrfach, u. a. in Kooperation mit der Bezirksregierung Arnsberg (Nordrhein-Westfalen) durchgeführt. Die teilnehmenden Lehrkräfte aus zwei Fortbildungen gaben der Veranstaltung nicht nur ausgesprochen gute Noten (Abbildung 10), auch ihre schriftlichen Rückmeldungen werfen ein positives Licht auf die Durchführung und Elemente des Fortbildungsmoduls. Generell lobten die Teilnehmer*innen über alle Fortbildungen hinweg die Transparenz, Praxisnähe und Struktur des Fortbildungsmoduls. Besonders positiv wurden dabei die „konkrete[n] Beispiele, die als Bausteine für den Unterricht verwendet werden können“ hervorgehoben. Zudem wurden die „Kochrezepte für GTR“, „Visualisierungen in GeoGebra“ sowie die Option, das Material selbst auszuprobieren und testen zu können, lobend erwähnt.

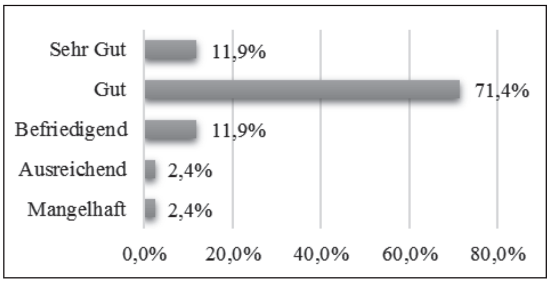

Abb. 10: Bewertung des Fortbildungsmoduls „Einstieg in die Stochastik in der Oberstufe – mit Simulationen“ anhand Schulnoten aus zwei Durchführungen (n = 42).

Die Fortbildungsbausteine sind bereits seit Ende 2017 auf www.dzlm.de/Stochastik_Sek zu finden. Sie erfreuen sich auch unter den Multiplikator*innen (ca. 700–1000 Personen in Deutschland) großer Beliebtheit; 145 Personen haben das Material bereits heruntergeladen (Stand 05.09.2019).

6 Fazit

Die Vision des im DLZM erstellten frei zugänglichen Fortbildungs- und Unterrichtsmaterials besteht aus einer umfangreichen, erprobten Materialsammlung, die individuell anpassbar und damit universell einsetzbar ist.

Das oben vorgestellte Material stellt in etwa einen von insgesamt fünf Tagen der Fortbildungsreihe „Stochastik in der Oberstufe“ dar, die von anwesenden Lehrer*innen äußerst positiv beurteilt wurde (siehe Abbildung 11).

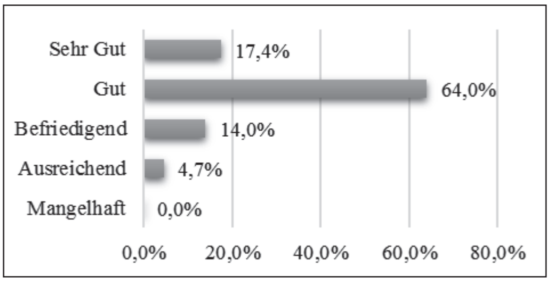

Abb. 11: Bewertung der gesamten 5-tägigen Fortbildung „Stochastik in der Oberstufe“ anhand Schulnoten aus vier Durchführungen (n = 86).

7 Ausblick

Die Umsetzung weiterer Tage dieser erprobten und bewährten Fortbildungsreihe in frei zugängliches Material sind kurz vor der Fertigstellung bzw. in Planung. Hierzu zählen:

- Einsatz digitaler Werkzeuge im Stochastikunterricht (TI-Nspire CX II, GeoGebra, Casio fxCG50), und
- Einstieg in das Hypothesentesten (P-Werte, Testen mit festem Signifikanzniveau).

Das Fortbildungsmaterial zum Einsatz digitaler Werkzeuge ist modular aufgebaut und enthält neben den Präsentationsfolien sorgfältig ausgearbeitete Lern- und Hilfekarten zu den verschiedenen digitalen Werkzeugen, die die Fortbildungsteilnehmer*innen in ihrem individuellen Tempo durcharbeiten können und die sie unverändert auch im Unterricht zur Anleitung ihrer Schüler*innen einsetzen können. Dabei wurde insbesondere darauf geachtet, dass die Befehlssyntax schrittweise und nachvollziehbar erläutert wird. Die Struktur der Lern- und Hilfekarten ermöglicht zudem ihren flexiblen Einsatz: Je nachdem, welche Visualisierung, Simulation oder Berechnung durchgeführt werden soll, kann die entsprechende Karte genutzt werden (siehe Abbildung 12). Im Unterricht kann das Repertoire der Schüler*innen so flexibel und situationsgerecht erweitert werden, und auch Fachgruppen können mit diesem Material eigenständig ihre Kompetenzen im Umgang mit der, an ihrer jeweiligen Schule eingeführten, Technologie erweitern.

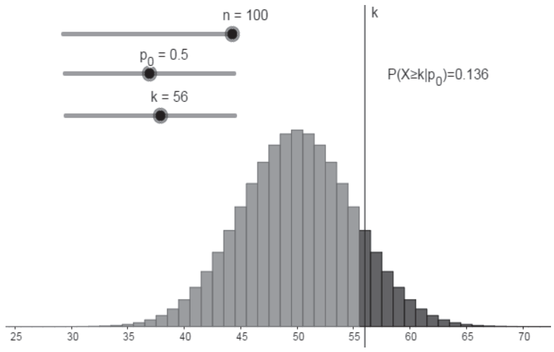

Abb. 12: Das Fortbildungsmaterial zum Einsatz digitaler Werkzeuge im Stochastikunterricht führt schrittweise zur Erstellung einer GeoGebra-Graphik, die den Fehler 1. Art zu einer Binomialverteilung visualisiert, wobei alle Parameter mittels Schieberegler verändert werden können.

Das Modul zum Einstieg in das Hypothesentesten mit P-Werten bietet einen erprobten und bewährten Vorschlag zum verständnisorientierten Einstieg in das Hypothesentesten. Dieses ist in vielen Bundesländern in den Lehr- oder Rahmenplänen verankert und gilt als besonders schwer zugänglich. Mit einer handlungsorientierten Meilensteinaufgabe („Geschmackstest“, inspiriert von der berühmten *lady tasting tea*, vgl. Fisher 1956; Salsburg 2001, und den Unterrichtsvorschlägen von Riemer, 1994) kann es in der Fortbildung wie auch im Unterricht gelingen, von Beginn an eine Verständnisbasis dafür zu schaffen, was ein Hypothesentest aussagen kann und was nicht.

Das Problem, was man (nicht) folgern darf, wenn die Nullhypothese nicht verworfen werden kann, und warum das so ist, wird intensiv behandelt. Darüber hinaus setzt sich das Material mit verschiedensten Fehlvorstellungen und deren Aufklärung auseinander, die erfahrungsgemäß im realen Unterricht oftmals auftreten. Durch die Bewusstmachung der möglichen Fehlvorstellungen (die oft auch die eigenen sind) können diese ausgeräumt und durch tragfähige Grundvorstellungen zu Interpretation von Hypothesentestergebnissen, bedingte Wahrscheinlichkeiten und Gütekriterien von Tests ersetzt werden. Die Stützung des unterrichtlichen Ansatzes durch digitale Simulationen, mit denen große Wiederholungszahlen des Experiments realisiert werden können, bewirkt hier eine unmittelbare Erfahrbarkeit dessen, was alles zufällig passieren kann – auch wenn einzelne Ergebnisse isoliert betrachtet eher unwahrscheinlich sind. So wird der Blick auf die gesamte Verteilung gelenkt und Verständnis für ihre charakteristischen Eigenschaften aufgebaut. Erst im Anschluss wird Kalkül geübt, wofür das Material vielfältige authentische Aufgaben bietet.

Literatur

Barzel, B.; Selter, C. (2015): Die DZLM-Gestaltungsprinzipien für Fortbildungen. In: *Journal für Mathematik-Didaktik, 36*(2), S. 259–284.

Biehler, R.; Hofmann, T.; Maxara, C.; Prömmel, A. (2011): Daten und Zufall mit Fathom: Unterrichtsideen für die SI und SII mit Software-Einführung. Braunschweig: Schroedel.

Biehler, R.; Maxara, C. (2007): Integration von stochastischer Simulation in den Stochastikunterricht mit Hilfe von Werkzeugsoftware. In: *Der Mathematikunterricht, 53*(3), S. 45–62.

Biehler, R.; Prömmel, A. (2011): Mit Simulationen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff – Warum man mit der optimalen Strategie beim Spiel „Differenz trifft“ verlieren kann. In: *Praxis der Mathematik in der Schule, 53*(39), S. 14–18.

Biehler, R.; Prömmel, A. (2013): Von ersten stochastischen Erfahrungen mit großen Zahlen bis zum $1/\sqrt{n}$-Gesetz – ein didaktisch orientiertes Stufenkonzept. In: *Stochastik in der Schule, 33*(2), S. 14–25.

Fisher, R. A. (1956): Mathematics of a lady tasting tea. In J. R. Newman (Hrsg.), The world of mathematics, Volume III, Part VIII: Statistics and the design of experiments (S. 1514–1521). New York: Simon & Schuster.

Kahneman, D.; Tversky, A. (1972): Subjective probability: a judgment of representativeness. In: *Cognitive Psychology, 3*, S. 430–454.

Prediger, S.; Leuders, T.; Rösken-Winter, B. (2017): Drei-Tetraeder-Modell der gegenstandsspezifischen Professionalisierungsforschung: Fachspezifische Verknüpfung von Design und Forschung. In K. Zierer; M. Keller-Schneider, M.; Gläser-Zikuda; M. Trautmann (Hrsg.), Jahrbuch für Allgemeine Didaktik 2017, Thementeil Allgemeine Didaktik und Lehrer/innenbildung (S. 159–177). Hohengehren: Schneider-Verlag.

Prediger, S. (2019): Theorizing in Design Research: Methodological reflections on developing and connecting theory elements for language-responsive mathematics classrooms. In: *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 15, 5–27.

Riemer, W. (1994): Schmeckt Lindt-Schokolade besser als Alpia? In: *mathematik lehren, Heft 62*, S. 14–18.

Salsburg, D. (2001): The lady tasting tea: How statistics revolutionized science in the twentieth century. New York: W.H. Freeman.

Sedlmeier, P.; Gigerenzer, G. (1997): Intuitions about sample size: The empirical law of large numbers. In: *Journal of Behavioral Decision Making, 10*, S. 33–51.

Tversky, A.; Kahneman, D. (1974): Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. In: *Science (New York, N.Y.), 185*(4157), S. 1124–1131.

Tversky, A.; Kahneman, D. (1971): Belief in the law of small numbers. In: *Psychological Bulletin, 76*(2), S. 105–110.

Anschrift der Verfasser*innen

Birgit Griese, Ralf Nieszporek, Rolf Biehler
DZLM Standort Paderborn
Institut für Mathematik, Universität Paderborn
Warburger Str. 100
33089 Paderborn
birgit.griese@math.upb.de
ralf.nieszporek@math.upb.de
biehler@math.upb.de